Компьютерные инструменты в образовании, 2020
№ 2: 27–58
УДК: 519.8
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-2-27-58

О РЕШЕНИИ МНОГОКРИТЕРИАЛЬНЫХ ЗАДАЧ ПРИНЯТИЯ РЕШЕНИЙ НА ОСНОВЕ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ*

Кривулин Н. К.[1], доктор физико-математических наук, доцент, ✉ nkk@math.spbu.ru
Абильдаев Т., бакалавр, jonoth2357@gmail.com
Горшечникова В. Д., бакалавр, st054363@student.spbu.ru
Капаца Д., бакалавр, David.Kapatsa@chaminade-stl.org
Магдич Е. А., бакалавр, st054381@student.spbu.ru
Мандрикова А. А., бакалавр, st054754@student.spbu.ru

[1]Санкт-Петербургский государственный университет,
Университетский пр., д. 28, Старый Петергоф, 198504, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация

Рассматриваются известные в литературе задачи оценки рейтингов альтернатив на основе парных сравнений. Для решения задач применяются три метода, включая традиционные метод анализа иерархий Т. Саати и метод взвешенных геометрических средних, а также новый метод минимаксной log-чебышевской аппроксимации, для которого решение находится при помощи аппарата и методов тропической (идемпотентной) математики. Сравнение полученных решений демонстрирует, что применение различных методов не всегда приводит к одинаковым или близким результатам. Если результаты различных методов значительно расходятся, выбор одного из них для принятия решения представляется не вполне обоснованным. Наоборот, совпадение или близость таких результатов может рассматриваться как некоторый дополнительный аргумент в пользу выбора одного из них в качестве решения, близкого к оптимальному.

Ключевые слова: *многокритериальные задачи принятия решений, парные сравнения, метод анализа иерархий, тропическая математика.*

Цитирование: Кривулин Н. К., Абильдаев Т., Горшечникова В. Д., Капаца Д., Магдич Е. А., Мандрикова А. А. О решении многокритериальных задач принятия решений на основе парных сравнений // Компьютерные инструменты в образовании. 2020. № 2. С. 27–58. doi: 10.32603/2071-2340-2020-2-27-58

1. ВВЕДЕНИЕ

Многокритериальные задачи оценки альтернатив на основе парных сравнений составляют важный класс задач принятия решений [1–3], которые встречаются во многих областях научной и практической деятельности. Пусть имеется набор альтернатив (способов, вариантов) принятия некоторого решения. Известны количественные результаты парных сравнений, при которых любые две альтернативы сравниваются между собой

* Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 20-010-00145).

в соответствии с несколькими критериями. Результаты сравнений могут быть получены, например, путем опроса респондентов (экспертов, покупателей, избирателей) или с помощью других процедур сравнения. Требуется на основе относительных результатов парных сравнений определить абсолютный рейтинг (приоритет, степень предпочтения, вес) каждой альтернативы для принятия решения. Такие задачи встречаются при принятии управленческих решений в менеджменте, изучении предпочтений потребителей в маркетинге, анализе социологических опросов в социологии, прогнозе результатов выборов в политологии и в других областях.

Для решения задач оценки альтернатив на основе парных сравнений используется ряд методов, часть которых опирается на различные эвристические алгоритмы, а другие обеспечивают строго обоснованное математическое решение [4]. Ясно, что когда несколько методов дают похожие результаты, устанавливая один и тот же (или почти один и тот же) порядок предпочтений альтернатив, любое из полученных решений можно считать в определенной мере обоснованным и использовать на практике.

Известно [5, 6], что применение разных методов может приводить к различным или даже противоположным результатам и тем самым существенно затруднять принятие оптимального решения. Учитывая значительные потери, которые могут быть вызваны не вполне обоснованными решениями в реальных задачах, приобретает актуальность проблема изучения и сопоставления результатов решения задач различными методами с целью дополнительной верификации и обоснования получаемых решений.

В настоящей работе приведены результаты решения задач многокритериальной оценки альтернатив на основе парных сравнений из работ [7–10]. Используются три метода решения: метод анализа иерархий [2, 7], взвешенный метод геометрических средних [11], а также метод минимаксной log-чебышевской аппроксимации [12, 13].

Решение задач осуществлялось в рамках выполнения студентами математико-механического факультета СПбГУ учебных заданий по курсам «Принятие решений» и «Алгебраические методы моделирования систем». Численные расчеты и аналитические вычисления производились с помощью системы MATLAB.

2. ОЦЕНКА АЛЬТЕРНАТИВ НА ОСНОВЕ ПАРНЫХ СРАВНЕНИЙ

В этом разделе описываются однокритериальная и многокритериальная задачи оценки альтернатив на основе парных сравнений и обсуждаются использованные далее в работе методы их решения.

2.1. Однокритериальная задача парных сравнений

Пусть имеется n альтернатив $\mathscr{A}_1,\ldots,\mathscr{A}_n$ принятия решения, которые сравниваются попарно. Результаты сравнений записываются в виде матрицы парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка n, где элемент $a_{ij} > 0$ показывает во сколько раз альтернатива $\mathscr{A}_i$ превосходит альтернативу $\mathscr{A}_j$. Требуется на основе относительных результатов парных сравнений определить вектор $\boldsymbol{x}$ абсолютных рейтингов альтернатив.

Элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ для всех $i,j = 1,\ldots,n$ удовлетворяют условию обратной симметричности $a_{ji} = 1/a_{ij}$, откуда следует равенство $a_{ii} = 1$ для всех i.

Матрица парных сравнений $\boldsymbol{A}$ называется согласованной, если выполняется свойство транзитивности в виде равенства $a_{ij} = a_{ik}a_{kj}$ для всех $i,j,k = 1,\ldots,n$. Элементы согласованной матрицы парных сравнений $\boldsymbol{A}$ имеют вид $a_{ij} = x_i/x_j$, где x_i — компоненты некоторого положительного вектора $\boldsymbol{x} = (x_i)$, который определен с точностью до положительного множителя. Кроме того, из равенства $a_{ij} = x_i/x_j$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$ следует, что $\boldsymbol{x}$ является вектором абсолютных рейтингов альтернатив.

В практических задачах матрицы, полученные на основе парных сравнений альтернатив, обычно не являются согласованными. При этом возникает задача аппроксимации исходной матрицы согласованной. В качестве вектора абсолютных приоритетов берется вектор, соответствующий найденной согласованной матрице. Для решения задачи приближения несогласованной матрицы согласованной применяются эвристические методы и методы аппроксимации [4].

Эвристические методы решения задачи парных сравнений обычно используют различные приемы агрегирования (суммирования) столбцов матрицы парных сравнений, взятых с коэффициентами (весами), выбор значений которых зависит от метода. Полученный в результате вектор порождает некоторую согласованную матрицу и прямо берется в качестве решения задачи. К указанным методам относятся: метод простых сумм, метод взвешенных сумм и метод главного собственного вектора.

Наиболее распространенным на практике является метод главного собственного вектора, который был предложен Т. Саати в 1970-х годах [2, 7]. В этом методе полагают, что коэффициенты при суммировании столбцов должны быть пропорциональны координатам вектора решения. Решением задачи является собственный вектор матрицы парных сравнений, который соответствует ее максимальному собственному числу.

Методы аппроксимации решают задачу минимизации ошибки приближения матрицы парных сравнений $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ согласованной матрицей $\boldsymbol{X} = (x_i/x_j)$. Применение таких методов приводят к математически обоснованному решению, которое, однако, может быть весьма сложным. Выбор вычислительных процедур решения обусловлен метрикой и шкалой, используемых для измерения ошибки.

При измерении ошибки в стандартной линейной шкале применяются прямоугольная (манхэттенская) метрика, евклидова метрика и метрика Чебышева. Минимизация такой ошибки обычно приводит к сложным нелинейным многоэкстремальным задачам оптимизации, решение которых оказывается слишком трудоемким [5, 14].

Если ошибка измеряется в логарифмической шкале, то решение упрощается и может быть получено в аналитической форме [11]. Заметим, что при переходе от линейной шкалы к логарифмической уменьшается степень разброса между значениями. Это позволяет снизить влияние на общую ошибку больших значений (например, $a_{ij} = 9$) в ущерб малым ($a_{ji} = 1/9$). Поэтому использование при аппроксимации в задаче парных сравнений логарифмической шкалы представляется вполне обоснованным.

Рассмотрим применение log-евклидовой метрики (евклидовой метрики в логарифмической шкале), в которой расстояние между матрицами $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ и $\boldsymbol{X} = (x_i/x_j)$ определяется с помощью логарифма по основанию больше 1 по формуле

$$l_2(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) = \left(\sum_{1 \le i,j \le n} \left(\log a_{ij} - \log \frac{x_i}{x_j} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

Чтобы найти минимум расстояния, достаточно вычислить производные по всем x_i, приравнять их к нулю и решить полученные уравнения. Для обратно симметрической матрицы $\boldsymbol{A}$ результатом является прямое решение задачи, в котором компоненты вектора рейтингов $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ представляются в параметрической форме

$$x_i = \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij} \right)^{1/n} u, \qquad i = 1, \ldots, n, \qquad u > 0.$$

Вектор $\boldsymbol{x}$ (обычно нормированный в прямоугольной метрике, то есть относительно суммы элементов) называют решением задачи парных сравнений по методу геометрических средних [11].

Расстояние в метрике Чебышева в логарифмической шкале записывается в виде

$$l_\infty(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{X}) = \max_{1\leq i,j\leq n} \left| \log a_{ij} - \log \frac{x_i}{x_j} \right|.$$

Задачу аппроксимации матрицы парных сравнений в log-чебышевской метрике можно свести к задаче минимизации функции без логарифма (см., например, [12, 15]):

$$\min_{\boldsymbol{x}} \max_{1\leq i,j\leq n} \frac{a_{ij}x_j}{x_i}, \tag{1}$$

которая эквивалентна минимизации максимальной относительной ошибки

$$\max_{1\leq i,j\leq n} \left| \frac{a_{ij} - x_i/x_j}{a_{ij}} \right|.$$

Методы главного собственного числа и геометрических средних всегда приводят к единственному вектору решения (с точностью до положительного множителя). Решение на основе log-чебышевской аппроксимации может быть неединственным.

Неединственность решения, с одной стороны, затрудняет выбор наиболее предпочтительной альтернативы на практике. В то же время, наличие множества решений задачи расширяет рамки принятия решений, например за счет учета дополнительных ограничений. В силу приблизительного характера модели парных сравнений, для которой типичной является несогласованность оценок, возможность существования нескольких решений задачи представляется вполне оправданной.

Пусть найден не единственный (с точностью до положительного множителя) вектор рейтингов альтернатив $\boldsymbol{x}$, а множество векторов $\mathscr{S}$. В качестве «наилучшего» и «наихудшего» решений задачи возьмем такие векторы из множества $\mathscr{S}$ результатов аппроксимации, которые в наилучшей и наихудшей степени различают (дифференцируют) альтернативы с наибольшим и наименьшим рейтингами [13, 16].

Рассмотрим отношение между максимальным и минимальным элементами вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$, которое называют интервальной или Гильбертовой полунормой,

$$\max_{1\leq i\leq n} x_i \Big/ \min_{1\leq j\leq n} x_j = \max_{1\leq i\leq n} x_i \times \max_{1\leq j\leq n} x_j^{-1}.$$

Назовем наилучшим дифференцирующим решением вектор рейтингов, для которого отношение между максимальным и минимальным элементами принимает наибольшее значение, а наихудшим — вектор, для которого указанное отношение минимально. Эти векторы находятся путем решения следующих задач:

$$\max_{\boldsymbol{x}\in\mathscr{S}} \max_{1\leq i\leq n} x_i \times \max_{1\leq j\leq n} x_j^{-1}, \qquad \min_{\boldsymbol{x}\in\mathscr{S}} \max_{1\leq i\leq n} x_i \times \max_{1\leq j\leq n} x_j^{-1}. \tag{2}$$

Аналитическое решение задач оптимизации (1) и (2), которые возникают при log-чебышевской аппроксимации матриц, может быть получено в явном виде при помощи методов и результатов тропической математики. Описание и обоснование таких решений приводится в работах [12, 15, 17, 18].

2.2. Многокритериальная задача парных сравнений

Рассмотрим задачу оценки рейтингов альтернатив, в которой n альтернатив $\mathscr{A}_1,\dots,\mathscr{A}_n$ сравниваются попарно по m критериям. Пусть $\boldsymbol{A}_k$ обозначает матрицу порядка n результатов парных сравнений альтернатив в соответствии с критерием $k = 1,\dots,m$. Критерии также сравниваются попарно, а результаты их сравнений образуют матрицу $\boldsymbol{C} = (c_{kl})$, где c_{kl} показывает во сколько раз критерий k важнее для принятия решения, чем l. Необходимо на основе матриц парных сравнений $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_m$ найти абсолютный индивидуальный рейтинг каждой альтернативы.

Распространенный подход к решению задачи состоит в использовании метода анализа иерархий Т. Саати. Решение включает нахождение нормированных относительно суммы элементов главного собственного вектора $\boldsymbol{w} = (w_k)$ для матрицы $\boldsymbol{C}$ и главных собственных векторов $\boldsymbol{x}_1,\dots,\boldsymbol{x}_n$ для матриц $\boldsymbol{A}_1,\dots,\boldsymbol{A}_m$. Затем вектор абсолютных рейтингов альтернатив вычисляется в виде взвешенной суммы

$$\boldsymbol{x} = \sum_{k=1}^{m} w_k \boldsymbol{x}_k.$$

Прямой подход к решению многокритериальной задачи оценки рейтингов альтернатив состоит в аппроксимации матриц парных сравнений по всем критериям общей согласованной матрицей. В этом случае требуется решить многокритериальную задачу минимизации векторной целевой функции, каждый элемент которой определяет ошибку аппроксимации матрицы парных сравнений для одного критерия.

Обозначим ошибку аппроксимации матрицы $\boldsymbol{A}_k = (a_{ij}^{(k)})$ согласованной матрицей $\boldsymbol{X} = (x_i/x_j)$, где x_i — элементы вектора $\boldsymbol{x}$, через $f_k(\boldsymbol{x})$.

Задача одновременной аппроксимации всех матриц $\boldsymbol{A}_k$ (без учета весов критериев) формулируется как задача минимизации векторной целевой функции критериев

$$\min_{\boldsymbol{x}} (f_1(\boldsymbol{x}),\dots,f_m(\boldsymbol{x})).$$

Целью решения такой многокритериальной задачи является нахождение Парето-оптимальных или, по крайней мере, слабо Парето-оптимальных решений [1, 3, 19]. Решение задачи $\boldsymbol{x}$ называется Парето-оптимальным (Парето-эффективным), если не существует такого решения $\boldsymbol{x}'$, что $f_i(\boldsymbol{x}') \le f_i(\boldsymbol{x})$ для всех $i = 1,\dots,m$ и $f_j(\boldsymbol{x}') < f_j(\boldsymbol{x})$ хотя бы для одного $j = 1,\dots,m$. Решение $\boldsymbol{x}$ является слабо Парето-оптимальным, если не существует такого $\boldsymbol{x}'$, что $f_i(\boldsymbol{x}') < f_i(\boldsymbol{x})$ для всех $i = 1,\dots,m$.

При решении многокритериальных задач обычно используются методы скаляризации, которые опираются на замену векторной целевой функции на скалярную. В качестве скалярной функции часто выбирают взвешенную сумму или взвешенный максимум элементов векторной целевой функции. Известно (см., например [20]), что при условии единственности решения задачи минимизации взвешенной суммы (максимума), это решение является Парето-оптимальным (слабо Парето-оптимальным).

Аппроксимация матриц парных сравнений с измерением ошибки в линейной шкале приводит к слишком трудным вычислительным задачам даже в случае одного критерия. Использование методов аппроксимации в логарифмической шкале, напротив, позволяет получить аналитическое решение задачи в явном виде.

Решение задачи парных сравнений с помощью log-евклидовой аппроксимации опирается на скаляризацию целевой функции с помощью взвешенной суммы

$$\sum_{k=1}^{m} w_k \sum_{1\le i,j\le n} \left(\log a_{ij}^{(k)} - \log\frac{x_i}{x_j}\right)^2,$$

где веса w_k получают из матрицы $\boldsymbol{C}$ при помощи метода геометрических средних.

В результате минимизации такой функции на основе вычисления производных и приравнивания их нулю получают вектор $\boldsymbol{x} = (x_i)$ с координатами

$$x_i = \prod_{k=1}^{m} \left(\prod_{j=1}^{n} a_{ij}^{(k)} \right)^{w_k/n} u, \qquad i = 1, \dots, n; \qquad u > 0.$$

Полученный вектор (обычно нормированный относительно суммы элементов) называют решением многокритериальной задачи парных сравнений методом взвешенных геометрических средних. В силу единственности (с точностью до положительного множителя) такое решение является Парето-оптимальным для многокритериальной задачи log-евклидовой аппроксимации.

Решение с помощью log-чебышевской аппроксимации включает скаляризацию целевой функции в виде взвешенного максимума ошибок аппроксимации по всем критериям. Минимизация этого максимума эквивалентна минимизации функции

$$\max_{1 \le k \le m} w_k \max_{1 \le i,j \le n} \frac{a_{ij}^{(k)} x_j}{x_i} = \max_{1 \le i,j \le n} \left(\max_{1 \le k \le m} w_k a_{ij}^{(k)} \right) \frac{x_j}{x_i},$$

где веса w_k получают из матрицы $\boldsymbol{C}$ путем решения задачи

$$\min_{\boldsymbol{w}} \max_{1 \le k,l \le m} \frac{c_{kl} w_l}{w_k}.$$

Для решения задач log-чебышевской аппроксимации при нахождении векторов весов критериев и рейтингов альтернатив, а также задач выбора наилучших и наихудших дифференцирующих векторов (когда вектор определяется неединственным образом) можно применить аппарат и методы тропической математики, которые позволяют получить результаты в явном виде в аналитической форме [13, 16, 21].

Если полученное решение является единственным, оно будет слабо Парето-оптимальным для многокритериальной задачи log-чебышевской аппроксимации.

3. ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ТРОПИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ

Целью этого раздела является обзор основных понятий, определений и обозначений тропической математики, которые служат для описания решений задач парных сравнений, которые приводятся ниже. Дальнейшие сведения по теории, методам и приложениям тропической математики можно найти, например, в работах [22–26].

3.1. Элементы тропической математики

Тропическая (идемпотентная) математика изучает теорию и приложения алгебраических систем с идемпотентными операциями. Операция является идемпотентной, если ее применение к одному и тому же аргументу дает этот аргумент в качестве результата. Например, вычисление максимума является идемпотентной операцией: $\max\{x, x\} = x$, а арифметическое сложение — нет: $x + x = 2x$.

Тропическая оптимизация занимается задачами, которые формулируются и решаются в терминах тропической математики. Методы тропической оптимизации позволяют найти новые решения для классических и вновь поставленных проблем. Многие задачи могут быть решены в явном виде, для других задач известны только алгоритмические решения. Область приложений тропической оптимизации включает задачи временного планирования сроков выполнения проектов, задачи размещения объектов на плоскости и в пространстве, задачи принятие решений и др.

Примером алгебраической системы с идемпотентной операцией является max-алгебра, которая представляет собой множество неотрицательных вещественных чисел $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ с операциями сложения и умножения.

Сложение обозначается символом $\oplus$ и для всех $x, y \in \mathbb{R}_+$ определено как максимум: $x \oplus y = \max\{x, y\}$. Эта операция обладает свойством идемпотентности в силу того, что $x \oplus x = \max\{x, x\} = x$. Обратного по сложению (противоположного) элемента не существует, а потому операция вычитания в max-алгебре не определена.

Умножение определено и обозначается как обычно. Нейтральные элементы по сложению и умножению совпадают с арифметическими нулем и единицей. Понятия обратного элемента по умножению и степени числа имеют обычный смысл.

Векторные и матричные операции выполняются по стандартным правилам с заменой арифметического сложения на операцию $\oplus$. В частности, умножение вектора или матрицы на скаляр ничем не отличается от соответствующих операций в обычной арифметике. Нулевой вектор, который обозначается символом $\mathbf{0}$, нулевая матрица, а также положительный вектор имеют стандартный вид.

Для ненулевого вектора-столбца $\boldsymbol{x} = (x_j)$ определен мультипликативно сопряженный вектор-строка $\boldsymbol{x}^- = (x_j^-)$, где $x_j^- = x_j^{-1}$, если $x_j \neq 0$, и $x_j^- = 0$ в противном случае. Для вектора из единиц, который обозначается как $\mathbf{1}$, выполняется $\mathbf{1}^- = \mathbf{1}^T$.

Мультипликативно сопряженное транспонирование преобразует ненулевую матрицу $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ в матрицу $\boldsymbol{A}^- = (a_{ij}^-)$, где $a_{ij}^- = a_{ji}^{-1}$, если $a_{ji} \neq 0$, иначе $a_{ij}^- = 0$.

Линейной комбинацией векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ с коэффициентами $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ называется выражение $x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n$. Вектор $\boldsymbol{b}$ линейно зависит от векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$, если существуют числа $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$ такие, что выполняется равенство $\boldsymbol{b} = x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n$. Коллинеарность двух векторов имеет обычный смысл: векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ являются коллинеарными, если $\boldsymbol{b} = x\boldsymbol{a}$ для некоторого $x \in \mathbb{R}_+$.

Множество всех линейных комбинаций $x_1\boldsymbol{a}_1 \oplus \cdots \oplus x_n\boldsymbol{a}_n$ векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ образует тропическое линейное пространство. Любой вектор $\boldsymbol{y}$ пространства выражается с помощью (тропического) произведения матрицы $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$, составленной из этих векторов как столбцов, и некоторого вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$ в виде $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$.

Рассмотрим квадратные матрицы с элементами из max-алгебры. Единичная матрица обозначается символом $\boldsymbol{I}$ и имеет обычный вид. Целая неотрицательная степень квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ обозначает (тропические) произведения матрицы на себя и определена для всех натуральных p так, что $\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I}$, $\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{p-1}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{p-1}$.

След матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка n вычисляется по формуле $\operatorname{tr}\boldsymbol{A} = a_{11} \oplus \cdots \oplus a_{nn}$.

Спектральным радиусом матрицы $\boldsymbol{A}$ называется число, которое вычисляется по формуле

$$\lambda = \operatorname{tr}\boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/n}(\boldsymbol{A}^n) = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{A}^i).$$

При условии, что $\lambda \leq 1$, определен оператор Клини (звезда Клини), который сопоставляет матрице $\boldsymbol{A}$ матрицу

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{A} \oplus \cdots \oplus \boldsymbol{A}^{n-1} = \bigoplus_{i=0}^{n-1} \boldsymbol{A}^i.$$

3.2. Решение многокритериальной задачи парных сравнений

Решение многокритериальной задачи парных сравнений на основе минимаксной log-чебышевской аппроксимации включает решение серии задач оптимизации, которые в терминах тропической математики могут быть решены аналитически [12, 15, 17, 18, 21]. При использовании аппарата и методов тропической математики процедура решения включает следующие шаги [13, 16]:

1. Для матрицы $\boldsymbol{C}$ находится спектральный радиус λ, составляется матрица $\lambda^{-1}\boldsymbol{C}$, а затем в параметрической форме определяется вектор весов критериев
$$\boldsymbol{w} = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}, \qquad \lambda = \bigoplus_{i=1}^{m} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{C}^{i}). \tag{3}$$
2. Если вектор $\boldsymbol{w}$ не единственный (с точностью до положительного множителя), то определяются наилучший и наихудший дифференцирующие векторы весов.
   2.1. Наилучший дифференцирующий вектор весов находится в параметрическом виде с использованием вектора параметров $\boldsymbol{v}_1$ по формуле:
$$\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{P}_{lk}^{-}\boldsymbol{P})\boldsymbol{v}_1, \qquad \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{0}, \tag{4}$$
   где матрица $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{p}_j)$ получена из $(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}$ вычеркиванием линейно зависимых столбцов, матрица $\boldsymbol{P}_{lk}$ получена из $\boldsymbol{P} = (p_{ij})$ обнулением всех элементов, кроме p_{lk}, а индексы k и l определяются, исходя из условий:
$$k = \arg\max_{j} \boldsymbol{1}^{T}\boldsymbol{p}_j\boldsymbol{p}_j^{-}\boldsymbol{1}, \qquad l = \arg\max_{i} p_{ik}^{-1}. \tag{5}$$
   2.2. Наихудший дифференцирующий вектор весов находится в параметрическом виде с использованием вектора параметров $\boldsymbol{v}_2$ по формулам:
$$\boldsymbol{w}_2 = (\Delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{T} \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{v}_2, \qquad \boldsymbol{v}_2 > \boldsymbol{0}, \qquad \Delta = \boldsymbol{1}^{T}(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^{*}\boldsymbol{1}. \tag{6}$$
3. С помощью векторов $\boldsymbol{w}_1 = (w_i^{(1)})$ и $\boldsymbol{w}_2 = (w_i^{(2)})$ строятся взвешенные суммы (или одна сумма, когда векторы совпадают) матриц парных сравнений альтернатив:
$$\boldsymbol{B} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(1)}\boldsymbol{A}_i, \qquad \boldsymbol{D} = \bigoplus_{i=1}^{m} w_i^{(2)}\boldsymbol{A}_i. \tag{7}$$
4. На основе взвешенной суммы $\boldsymbol{B}$ вычисляется вектор рейтингов альтернатив, соответствующий наилучшему дифференцирующему вектору весов критериев.
   4.1. Для матрицы $\boldsymbol{B}$ находится спектральный радиус μ, составляется матрица $\mu^{-1}\boldsymbol{B}$, а затем в параметрической форме определяется вектор рейтингов
$$\boldsymbol{x}_1 = (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^{*}\boldsymbol{u}_1, \qquad \boldsymbol{u}_1 > \boldsymbol{0}, \qquad \mu = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{B}^{i}). \tag{8}$$
   4.2. Если вектор рейтингов $\boldsymbol{x}_1$ не единственный (с точностью до положительного множителя), то строится наилучший дифференцирующий вектор
$$\boldsymbol{x}_1' = \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{Q}_{lk}^{-}\boldsymbol{Q})\boldsymbol{u}_1', \qquad \boldsymbol{u}_1' > \boldsymbol{0}, \tag{9}$$
   где матрица $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{q}_j)$ получена из $(\mu^{-1}\boldsymbol{B})^{*}$ вычеркиванием линейно зависимых столбцов, матрица $\boldsymbol{Q}_{lk}$ получена из $\boldsymbol{Q} = (q_{ij})$ обнулением всех элементов, кроме q_{lk}, а индексы k и l задаются условиями:
$$k = \arg\max_{j} \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{q}_j\boldsymbol{q}_j^{-}\boldsymbol{1}, \qquad l = \arg\max_{i} q_{ik}^{-1}. \tag{10}$$

5. На основе взвешенной суммы $\boldsymbol{D}$ вычисляется вектор рейтингов альтернатив, соответствующий наихудшему дифференцирующему вектору весов критериев.

   5.1. Для матрицы $\boldsymbol{D}$ находится спектральный радиус ν, составляется матрица $\nu^{-1}\boldsymbol{D}$, а затем в параметрической форме определяется вектор рейтингов

$$\boldsymbol{x}_2 = (\nu^{-1}\boldsymbol{D})^* \boldsymbol{u}_2, \qquad \boldsymbol{u}_2 > \boldsymbol{0}, \qquad \nu = \bigoplus_{i=1}^{n} \operatorname{tr}^{1/i}(\boldsymbol{D}^i). \tag{11}$$

   5.2. Если вектор рейтингов $\boldsymbol{x}_2$ не единственный (с точностью до положительного множителя), то строится наихудший дифференцирующий вектор

$$\boldsymbol{x}_2' = (\delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^{\mathrm{T}} \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D})^* \boldsymbol{u}_2', \qquad \boldsymbol{u}_2' > \boldsymbol{0}, \qquad \delta = \boldsymbol{1}^{\mathrm{T}}(\nu^{-1}\boldsymbol{D})^*\boldsymbol{1}. \tag{12}$$

4. ЗАДАЧИ ИЗ РАБОТЫ T. L. SAATY, G. HU (1998)

В этом разделе описано решение задачи, изученной в работе [9, стр. 124], (задача 1) и результаты решения другой аналогичной задачи [9, стр. 122-124] (задача 2).

4.1. Решение задачи 1

Рассмотрим задачу оценки $m = 4$ альтернатив $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_4$ по $n = 4$ критериям из работы [9, стр. 124] и построим ее решения с помощью метода анализа иерархий Т. Саати, метода взвешенных геометрических средних и метода минимаксной log-чебышевской аппроксимации. Матрица парных сравнений критериев задана в форме

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1/4 & 1 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 3 & 1 & 3 \\ 1/2 & 4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрицы парных сравнений альтернатив по каждому критерию имеют вид

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1/4 & 1 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 3 & 1 & 3 \\ 1/2 & 4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 1/4 & 1 & 1/3 & 1/4 \\ 1/2 & 3 & 1 & 3 \\ 1/2 & 4 & 1/3 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1/2 & 1 & 1/3 \\ 3 & 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/4 & 1/3 \\ 4 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 1/2 & 1 & 1/3 \\ 3 & 1/2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.1.1. Метод анализа иерархий

Для применения метода анализа иерархий сначала необходимо найти главные собственные векторы всех матриц, а затем нормировать их относительно суммы элементов. С учетом равенств $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{A}_4$, вычисление нормированных главных собственных векторов дает следующие результаты:

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 \approx \begin{pmatrix} 0.4117 \\ 0.0791 \\ 0.3157 \\ 0.1935 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 0.0791 \\ 0.4117 \\ 0.1935 \\ 0.3157 \end{pmatrix}.$$

Найдем взвешенную сумму главных собственных векторов матриц парных сравнений альтернатив, а затем для удобства сравнения с результатами других методов нормируем полученный вектор относительно максимального элемента:

$$\boldsymbol{x} = w_1\boldsymbol{x}_1 + \cdots + w_4\boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 0.2423 \\ 0.2485 \\ 0.2535 \\ 0.2557 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0.9475 \\ 0.9715 \\ 0.9912 \\ 1.0000 \end{pmatrix}.$$

Полученное решение упорядочивает альтернативы по степени предпочтения так:

$$\mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_1,$$

где символ $\succ$ обозначает отношение предпочтения для пары альтернатив.

4.1.2. Метод взвешенных геометрических средних

Чтобы использовать метод взвешенных геометрических средних, требуется найти взвешенный относительно суммы элементов вектор геометрических средних по строкам матрицы парных сравнений критериев и векторы геометрических средних по строкам матриц парных сравнений альтернатив. После вычисления нормированного вектора для матрицы $\boldsymbol{C}$ и векторов для матриц $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A}_2$ и $\boldsymbol{A}_3 = \boldsymbol{A}_4$ получим

$$\boldsymbol{w} \approx \begin{pmatrix} 0.4219 \\ 0.0802 \\ 0.3073 \\ 0.1906 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2 \approx \begin{pmatrix} 2.0000 \\ 0.3799 \\ 1.4565 \\ 0.9036 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}_3 = \boldsymbol{x}_4 \approx \begin{pmatrix} 0.3799 \\ 2.0000 \\ 0.9036 \\ 1.4565 \end{pmatrix}.$$

Найдем векторы рейтингов альтернатив:

$$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_{11}^{w_1} \cdots x_{14}^{w_4} \\ x_{21}^{w_1} \cdots x_{24}^{w_4} \\ x_{31}^{w_1} \cdots x_{34}^{w_4} \\ x_{41}^{w_1} \cdots x_{44}^{w_4} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.8747 \\ 0.8687 \\ 1.1483 \\ 1.1461 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0.7617 \\ 0.7564 \\ 1.0000 \\ 0.9980 \end{pmatrix}.$$

Соответствующий порядок альтернатив записывается в виде

$$\mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2.$$

4.1.3. Метод минимаксной log-чебышевской аппроксимации

Для решения задачи с помощью минимаксной log-чебышевской аппроксимации будем производить аналитические вычисления в терминах тропического полуполя с операцией максимума в роли сложения, которое называют max-алгеброй.

Построение вектора весов критериев. Определим веса критериев с помощью формул (3). Сначала для матрицы парных сравнений критериев $\boldsymbol{C}$ найдем степени:

$$\boldsymbol{C}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8 & 2 & 6 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 1 \\ 3/2 & 12 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 4/3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{C}^3 = \begin{pmatrix} 3 & 24 & 8/3 & 6 \\ 1/2 & 4 & 1/2 & 3/2 \\ 3 & 12 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \end{pmatrix},$$
$$\boldsymbol{C}^4 = \begin{pmatrix} 6 & 24 & 8 & 8 \\ 1 & 6 & 4/3 & 3/2 \\ 3 & 12 & 6 & 12 \\ 2 & 16 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

После вычисления следов степеней матрицы $\boldsymbol{C}$ определим ее спектральный радиус

$$\lambda = \operatorname{tr}\boldsymbol{C} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/4}(\boldsymbol{C}^4) = 2^{2/3} \approx 1.5874.$$

Затем составим матрицу $\lambda^{-1}\boldsymbol{C}$ и найдем ее степени

$$(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^2 = \begin{pmatrix} \lambda/4 & 2\lambda & \lambda/2 & 3\lambda/2 \\ \lambda/16 & \lambda/4 & \lambda/8 & \lambda/4 \\ 3\lambda/8 & 3\lambda & \lambda/4 & 3\lambda/4 \\ \lambda/4 & \lambda & \lambda/3 & \lambda/4 \end{pmatrix}, \qquad (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^3 = \begin{pmatrix} 3/4 & 6 & 2/3 & 3/2 \\ 1/8 & 1 & 1/8 & 3/8 \\ 3/4 & 3 & 1 & 3/4 \\ 1/4 & 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычисление матрицы Клини, столбцы которой генерируют все оптимальные векторы весов критериев, дает следующий результат:

$$(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \boldsymbol{I} \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C} \oplus (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^2 \oplus (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^3 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2/\lambda & 3\lambda/2 \\ 1/4\lambda & 1 & 1/3\lambda & \lambda/4 \\ 3/4 & 3\lambda & 1 & 3/\lambda \\ \lambda/4 & 4/\lambda & \lambda/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что второй, третий и четвертый столбцы полученной матрицы коллинеарны: третий столбец получается из второго умножением на $1/3\lambda$, а четвертый из второго — умножением на $\lambda/4$. Учитывая, что коллинеарные столбцы генерируют одни и те же векторы решений, все такие столбцы, кроме одного, можно удалить.

Возьмем первый столбец и заметим, что максимальным элементом в этом столбце является 1. Вместе с ним запишем второй столбец, умноженный на $1/6$ для того, чтобы максимальный элемент в этом столбце также был равен 1. Получим вектор весов критериев, записанный в параметрической форме

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1/4\lambda & 1/6 \\ 3/4 & \lambda/2 \\ \lambda/4 & 2/3\lambda \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}.$$

Чтобы построить наилучший дифференцирующий вектор весов критериев по формуле (4) для матрицы $\boldsymbol{P}$ найдем пары индексов (l,k), отвечающих условиям (5).

Последовательно вычислим $\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{p}_1 = \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{p}_2 = 1$, $\boldsymbol{p}_1^-\boldsymbol{1} = 4\lambda \approx 6.3496$ и $\boldsymbol{p}_2^-\boldsymbol{1} = 6$. Первому условию в (5) удовлетворяет $k = 1$. Учитывая, что среди величин $p_{11}^{-1} = 1$, $p_{21}^{-1} = 4\lambda \approx$

6.3496, $p_{31}^{-1} = 4/3 \approx 1.3333$ и $p_{41}^{-1} = 4/\lambda \approx 2.5198$ максимальной является вторая, выбираем $l = 2$. В результате имеем пару индексов $(2,1)$. Построим матрицы:

$$\boldsymbol{P}_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1/4\lambda & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{P}_{21}^{-}\boldsymbol{P}) = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda/3 \\ 1/4\lambda & 1/6 \\ 3/4 & \lambda/2 \\ \lambda/4 & 2/3\lambda \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что оба столбца последней матрицы, которая генерирует наилучшие дифференцирующие векторы весов критериев, коллинеарны. Выбирая первый столбец, представим вектор весов в виде

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4\lambda & 3/4 & \lambda/4 \end{pmatrix}^T v_1, \qquad v_1 > 0.$$

Теперь определим наихудший дифференцирующий вектор весов критериев по формулам (6). Сначала вычислим

$$\Delta = \mathbf{1}^T(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*\mathbf{1} = 6, \qquad \Delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1/\lambda & 4/\lambda & 2/\lambda & 2/\lambda \\ 1/6 & 1/\lambda & 1/3\lambda & 1/6 \\ 1/2\lambda & 3/\lambda & 1/\lambda & 3/\lambda \\ 1/2\lambda & 4/\lambda & 1/3\lambda & 1/\lambda \end{pmatrix}.$$

Найдем степени полученной матрицы:

$$(\Delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C})^2 = \begin{pmatrix} 2/3\lambda & 2\lambda & \lambda/2 & 3\lambda/2 \\ 1/6\lambda & 2/3\lambda & 1/3\lambda & \lambda/4 \\ 3\lambda/8 & 3\lambda & \lambda/4 & 3\lambda/4 \\ 2/3\lambda & \lambda & \lambda/3 & 2/3\lambda \end{pmatrix},$$

$$(\Delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C})^3 = \begin{pmatrix} 3/4 & 6 & \lambda/2 & 3/2 \\ 1/8 & 1 & \lambda/12 & \lambda/4 \\ \lambda/2 & 3 & 1 & \lambda/2 \\ \lambda/6 & 2\lambda/3 & \lambda/3 & 1 \end{pmatrix},$$

а затем вычислим матрицу Клини

$$(\Delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 2/\lambda & 3\lambda/2 \\ 1/6 & 1 & 1/3\lambda & \lambda/4 \\ \lambda/2 & 3\lambda & 1 & 3/\lambda \\ 2/3\lambda & 4/\lambda & \lambda/3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что все столбцы полученной матрицы коллинеарны, для записи наихудшего дифференцирующего вектора весов оставим один, например первый:

$$\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 & \lambda/2 & 2/3\lambda \end{pmatrix}^T v_2, \qquad v_2 > 0.$$

Наилучший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив. Возьмем наилучший дифференцирующий вектор весов $\boldsymbol{w}_1$ и положим $v_1 = 1$. Используя элементы полученного вектора в качестве весов и формулу в (7), составим взвешенную сумму

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 \oplus \frac{1}{4\lambda}\boldsymbol{A}_2 \oplus \frac{3}{4}\boldsymbol{A}_3 \oplus \frac{\lambda}{4}\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{A}_1 \oplus \frac{3}{4}\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3/2 & 3/2 \\ 3 & 3 & 1 & 3 \\ 9/4 & 4 & 9/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим формулы (8). Для матрицы $\boldsymbol{B}$ найдем степени

$$\boldsymbol{B}^2 = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 6 & 6 \\ 9/2 & 12 & 6 & 6 \\ 9 & 12 & 27/4 & 6 \\ 12 & 9 & 6 & 27/4 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{B}^3 = \begin{pmatrix} 24 & 48 & 24 & 24 \\ 36 & 24 & 18 & 18 \\ 36 & 36 & 18 & 81/4 \\ 27 & 48 & 24 & 24 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^4 = \begin{pmatrix} 144 & 96 & 72 & 72 \\ 72 & 144 & 72 & 72 \\ 108 & 144 & 72 & 72 \\ 144 & 108 & 72 & 72 \end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{B}$ равен

$$\mu = \operatorname{tr}\boldsymbol{B} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/4}(\boldsymbol{B}^4) = 2 \cdot 3^{1/2} \approx 3.4641.$$

Построим матрицу

$$\mu^{-1}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1/\mu & 4/\mu & 2/\mu & 2/\mu \\ 3/\mu & 1/\mu & 3/2\mu & 3/2\mu \\ 3/\mu & 3/\mu & 1/\mu & 3/\mu \\ 9/4\mu & 4/\mu & 9/4\mu & 1/\mu \end{pmatrix}$$

и вычислим степени

$$(\mu^{-1}\boldsymbol{B})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2/3 & 1/2 & 1/2 \\ 3/8 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1 & 9/16 & 1/2 \\ 1 & 3/4 & 1/2 & 9/16 \end{pmatrix}, \qquad (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^3 = \begin{pmatrix} \mu/6 & \mu/3 & \mu/6 & \mu/6 \\ \mu/4 & \mu/6 & \mu/8 & \mu/8 \\ \mu/4 & \mu/4 & \mu/8 & 9\mu/64 \\ 3\mu/16 & \mu/3 & \mu/6 & \mu/6 \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу Клини

$$(\mu^{-1}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{I} \oplus \mu^{-1}\boldsymbol{B} \oplus (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^2 \oplus (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^3 = \begin{pmatrix} 1 & \mu/3 & \mu/6 & \mu/6 \\ \mu/4 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ \mu/4 & 1 & 1 & \mu/4 \\ 1 & \mu/3 & 3\mu/16 & 1 \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся формулой (9). Учитывая, что первые два столбца коллинеарны, оставим первый и запишем решения в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mu/6 & \mu/6 \\ \mu/4 & 1/2 & 1/2 \\ \mu/4 & 1 & \mu/4 \\ 1 & 3\mu/16 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}.$$

Найдем среди полученных векторов наилучший дифференцирующий вектор. Вычислим $\boldsymbol{1}^T\boldsymbol{q}_1 = \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{q}_2 = \boldsymbol{1}^T\boldsymbol{q}_3 = 1$, $\boldsymbol{q}_1^-\boldsymbol{1} = 4/\mu \approx 1.1547$, $\boldsymbol{q}_2^-\boldsymbol{1} = \boldsymbol{q}_3^-\boldsymbol{1} = 2$. Следовательно, первому условию в (10) отвечает $k = 2,3$. Обоим условиям удовлетворяют пары индексов (l,k) в виде $(2,2)$ и $(2,3)$. Возьмем пару индексов $(2,2)$ и построим матрицы:

$$\boldsymbol{Q}_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{Q}_{22}^-\boldsymbol{Q}) = \begin{pmatrix} 1 & \mu/6 & \mu/6 \\ \mu/4 & 1/2 & 1/2 \\ \mu/2 & 1 & 1 \\ 9/8 & 3\mu/16 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первые два столбца последней матрицы, которая генерирует все наилучшие дифференцирующие векторы рейтингов альтернатив, коллинеарны. Для записи решений оставим второй и третий столбцы:

$$\begin{pmatrix}\mu/6 & 1/2 & 1 & 3\mu/16\end{pmatrix}^T, \qquad \begin{pmatrix}\mu/6 & 1/2 & 1 & 1\end{pmatrix}^T.$$

Аналогичным образом для пары индексов $(2,3)$ получим решения:

$$\begin{pmatrix}\mu/6 & 1/2 & 1 & 1\end{pmatrix}^T, \qquad \begin{pmatrix}\mu/6 & 1/2 & \mu/4 & 1\end{pmatrix}^T.$$

Объединим полученные решения, а затем исключим векторы, линейно зависимые от остальных. Получим два вектора решений, которые наилучшим образом дифференцируют альтернативы с наибольшим и наименьшим рейтингами:

$$\begin{pmatrix}\mu/6\\1/2\\1\\3\mu/16\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0.5774\\0.5000\\1.0000\\0.6495\end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix}\mu/6\\1/2\\\mu/4\\1\end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix}0.5774\\0.5000\\0.8660\\1.0000\end{pmatrix}.$$

Эти векторы определяют порядок альтернатив в виде

$$\mathcal{A}_3 \succ \mathcal{A}_4 \succ \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_2, \qquad \mathcal{A}_4 \succ \mathcal{A}_3 \succ \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_2.$$

Наихудший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив. Рассмотрим вектор весов $\boldsymbol{w}_2$ при $v_2 = 1$. С помощью этого вектора составим матрицу

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}_1 \oplus \frac{1}{6}\boldsymbol{A}_2 \oplus \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{A}_3 \oplus \frac{2}{3\lambda}\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{A}_1 \oplus \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix}1 & 4 & 2 & 2\\ 2\lambda & 1 & \lambda & \lambda\\ 2\lambda & 3 & 1 & 3\\ 3\lambda/2 & 4 & 3\lambda/2 & 1\end{pmatrix}.$$

Чтобы применить формулы (11), для матрицы $\boldsymbol{D}$ найдем степени

$$\boldsymbol{D}^2 = \begin{pmatrix}8\lambda & 8 & 4\lambda & 4\lambda\\ 8/\lambda & 8\lambda & 4\lambda & 4\lambda\\ 6\lambda & 8\lambda & 9\lambda/2 & 4\lambda\\ 8\lambda & 6\lambda & 4\lambda & (9\lambda/2)\end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{D}^3 = \begin{pmatrix}16\lambda & 32\lambda & 16\lambda & 16\lambda\\ 64/\lambda & 16\lambda & 32/\lambda & 32/\lambda\\ 64/\lambda & 24\lambda & 32/\lambda & 27\lambda/2\\ 48/\lambda & 32\lambda & 16\lambda & 16\lambda\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{D}^4 = \begin{pmatrix}256/\lambda & 64\lambda & 128/\lambda & 128/\lambda\\ 128/\lambda & 256/\lambda & 128/\lambda & 128/\lambda\\ 192/\lambda & 256/\lambda & 128/\lambda & 128/\lambda\\ 256/\lambda & 192/\lambda & 128/\lambda & 128/\lambda\end{pmatrix}.$$

Спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{D}$ равен

$$\nu = \operatorname{tr}\boldsymbol{D} \oplus \cdots \oplus \operatorname{tr}^{1/4}(\boldsymbol{D}^4) = 2^{11/6} \approx 3.5636.$$

Построим матрицу

$$\nu^{-1}\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix}1/\nu & 4/\nu & 2/\nu & 2/\nu\\ \nu/4 & 1/\nu & \nu/8 & \nu/8\\ \nu/4 & 3/\nu & 1/\nu & 3/\nu\\ 3\nu/16 & 4/\nu & 3\nu/16 & 1/\nu\end{pmatrix}$$

и вычислим ее степени

$$(\nu^{-1}\boldsymbol{D})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 8/\mu^2 & 1/2 & 1/2 \\ \mu^2/32 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ 3/4 & 1 & 9/16 & 1/2 \\ 1 & 3/4 & 1/2 & 9/16 \end{pmatrix}, \quad (\nu^{-1}\boldsymbol{D})^3 = \begin{pmatrix} 2/\nu & 4/\nu & 2/\nu & 2/\nu \\ \nu/4 & 2/\nu & \nu/8 & \nu/8 \\ \nu/4 & 3/\nu & \nu/8 & 27/16\nu \\ 3\nu/16 & 4/\nu & 2/\nu & 2/\nu \end{pmatrix}.$$

Найдем матрицу Клини

$$(\nu^{-1}\boldsymbol{D})^* = \boldsymbol{I} \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D} \oplus (\nu^{-1}\boldsymbol{D})^2 \oplus (\nu^{-1}\boldsymbol{D})^3 = \begin{pmatrix} 1 & 4/\nu & 2/\nu & 2/\nu \\ \nu/4 & 1 & 1/2 & 1/2 \\ \nu/4 & 1 & 1 & 3/\nu \\ 1 & 4/\nu & 3\nu/16 & 1 \end{pmatrix}.$$

В соответствии с (12) последовательно найдем

$$\delta = \boldsymbol{1}^T(\nu^{-1}\boldsymbol{D})^*\boldsymbol{1} = 4/\nu \approx 1.1225, \qquad \delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} \nu/4 & 4/\nu & \nu/4 & \nu/4 \\ \nu/4 & \nu/4 & \nu/4 & \nu/4 \\ \nu/4 & \nu/4 & \nu/4 & \nu/4 \\ \nu/4 & 4/\nu & \nu/4 & \nu/4 \end{pmatrix}.$$

Вычислим степени

$$(\delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D})^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \nu^2/16 & 1 & \nu^2/16 & \nu^2/16 \\ \nu^2/16 & 1 & \nu^2/16 & \nu^2/16 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$(\delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D})^3 = \begin{pmatrix} \nu/4 & 4/\nu & \nu/4 & \nu/4 \\ \nu/4 & \nu/4 & \nu/4 & \nu/4 \\ \nu/4 & \nu/4 & \nu/4 & \nu/4 \\ \nu/4 & 4/\nu & \nu/4 & \nu/4 \end{pmatrix},$$

а затем построим матрицу Клини

$$(\delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D})^* = \begin{pmatrix} 1 & 4/\nu & 1 & 1 \\ \nu/4 & 1 & \nu/4 & \nu/4 \\ \nu/4 & 1 & 1 & \nu/4 \\ 1 & 4/\nu & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первый, второй и четвертый столбцы матрицы Клини коллинеарны. В качестве наихудших дифференцирующих векторов альтернатив оставим первый и третий:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \nu/4 \\ \nu/4 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.8909 \\ 0.8909 \\ 1.0000 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ \nu/4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.8909 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix},$$

которые определяют следующие два порядка следования альтернатив:

$$\mathscr{A}_4 \equiv \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_3 \equiv \mathscr{A}_2, \qquad \mathscr{A}_4 \equiv \mathscr{A}_1 \equiv \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_2.$$

Заметим, что порядок одного из наилучших дифференцирующих решений совпадает с порядком метода взвешенных геометрических средних, а порядок другого оказывается близким к результату метода анализа иерархий. Порядок наихудших дифференцирующих решений отличается от порядка, полученного этими методами.

4.2. Результаты решения задачи 2

Представим результаты оценки рейтингов $n = 4$ альтернатив по $m = 4$ критериям для задачи [9, с. 122–124]. Имеется матрица парных сравнений критериев

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 4 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix},$$

и следующие матрицы парных сравнений альтернатив по каждому критерию:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 4 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 4 & 1 & 4 & 1/2 \\ 3 & 1/4 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/3 & 1/4 \\ 4 & 1 & 4 & 1/2 \\ 3 & 1/4 & 1 & 1/2 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 1/2 & 1 & 3 & 3 \\ 1/2 & 1/3 & 1 & 4 \\ 1/4 & 1/3 & 1/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

4.2.1. Метод анализа иерархий

После вычисления нормированных относительно суммы элементов главных собственных векторов матриц $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_4$ найдем вектор $\boldsymbol{x}$ взвешенной суммы собственных векторов матриц парных сравнений, а затем нормируем его относительно максимального элемента. Получим векторы рейтингов и порядок альтернатив в виде

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0.2404 \\ 0.3352 \\ 0.1766 \\ 0.2478 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0.7172 \\ 1.0000 \\ 0.5269 \\ 0.7390 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_3.$$

4.2.2. Метод взвешенных геометрических средних.

Вычислим нормированный вектор геометрических средних для матрицы $\boldsymbol{C}$ и векторы геометрических средних для матриц $\boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_4$. Полученные результаты применим для нахождения векторов рейтингов, а также порядка альтернатив:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0.8747 \\ 1.5645 \\ 0.8411 \\ 0.8687 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0.5591 \\ 1.0000 \\ 0.5376 \\ 0.5552 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3.$$

4.2.3. Метод минимаксной log-чебышевской аппроксимации.

Приведем результаты основных этапов решения задачи с помощью минимаксной log-чебышевской аппроксимации в терминах тропической математики.

Построение вектора весов критериев. Определим наилучший и наихудший дифференцирующие векторы весов критериев. Вычислим степени матрицы $\boldsymbol{C}$, чтобы найти ее спектральный радиус λ. Затем составим матрицу $\lambda^{-1}\boldsymbol{C}$, найдем ее степени и построим матрицу Клини. В результате получим:

$$\lambda = 2^{2/3} \approx 1.5874, \qquad (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \begin{pmatrix} 1 & 2/\lambda & 3\lambda/2 & 6 \\ 3/4 & 1 & 3/\lambda & 3\lambda \\ \lambda/4 & \lambda/3 & 1 & 4/\lambda \\ 1/4\lambda & 1/3\lambda & \lambda/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что второй, третий и четвертый столбцы матрицы Клини коллинеарны, оставим второй столбец, умножив его на $\lambda/2$. Получим вектор весов критериев в виде

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3/4 & \lambda/2 \\ \lambda/4 & 2/3\lambda \\ 1/4\lambda & 1/6 \end{pmatrix}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}.$$

Чтобы построить наилучший дифференцирующий вектор весов критериев, найдем пары индексов, отвечающих условиям (5). В результате получаем пару $(4,1)$.

По формуле (4) построим матрицу $\boldsymbol{P}_{41}$, а затем найдем матрицу $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{P}_{41}^{-}\boldsymbol{P})$. Оставляя линейно независимые столбцы последней матрицы, запишем наилучший дифференцирующий вектор весов в виде

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & \lambda/4 & 1/4\lambda \end{pmatrix}^T v_1, \qquad v_1 > 0.$$

Найдем наихудший дифференцирующий вектор весов критериев по формулам (6). Последовательно вычислим

$$\Delta = \boldsymbol{1}^T(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*\boldsymbol{1} = 6, \qquad (\Delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \begin{pmatrix} 1 & 2/\lambda & 3\lambda/2 & 6 \\ \lambda/2 & 1 & 3/\lambda & 3\lambda \\ 2/3\lambda & \lambda/3 & 1 & 4/\lambda \\ 1/6 & 1/3\lambda & \lambda/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что все столбцы полученной матрицы коллинеарны, для записи наихудшего дифференцирующего вектора весов оставим первый:

$$\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/2 & 2/3\lambda & 1/6 \end{pmatrix}^T v_2, \qquad v_2 > 0.$$

Наилучший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив. Рассмотрим наилучший дифференцирующий вектор весов $\boldsymbol{w}_1$ и положим $v_1 = 1$. С помощью полученного вектора составим взвешенную сумму

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 \oplus \frac{3}{4}\boldsymbol{A}_2 \oplus \frac{\lambda}{4}\boldsymbol{A}_3 \oplus \frac{1}{4\lambda}\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{A}_1 \oplus \frac{3}{4}\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \\ 9/4 & 1/3 & 1 & 4 \\ 3 & 3/2 & 3/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $\boldsymbol{B}$ вычислим спектральный радиус μ, построим матрицу $\mu^{-1}\boldsymbol{B}$ и найдем для нее матрицу Клини:

$$\mu = 2 \cdot 3^{1/2} \approx 3.4641, \qquad (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^* = \begin{pmatrix} 1 & \mu/6 & \mu/6 & \mu/3 \\ \mu/4 & 1 & \mu/4 & 1 \\ 1 & \mu/6 & 1 & \mu/3 \\ \mu/4 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что первый и последний столбцы коллинеарны, оставим первый и запишем все векторы решений в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mu/6 & \mu/6 \\ \mu/4 & 1 & \mu/4 \\ 1 & \mu/6 & 1 \\ \mu/4 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}.$$

Найдем среди решений наилучший дифференцирующий вектор. Проверяя условия (10), определим пары индексов $(4,2)$ и $(4,3)$. Для пары $(4,2)$ построим матрицу $\boldsymbol{Q}_{42}$, а затем матрицу $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{Q}_{42}^{-}\boldsymbol{Q})$. Выбирая линейно независимые столбцы в последней матрице, определим наилучшие дифференцирующие векторы рейтингов:

$$\begin{pmatrix} \mu/6 & 1 & \mu/6 & 1/2 \end{pmatrix}^T, \qquad \begin{pmatrix} \mu/6 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}^T.$$

Аналогичным образом для пары индексов $(4,3)$ найдем решения в виде

$$\begin{pmatrix} \mu/6 & 1 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}^T, \qquad \begin{pmatrix} \mu/6 & \mu/4 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}^T.$$

Объединяя векторы решений, а затем отбрасывая линейно зависимые векторы, получим два наилучших дифференцирующих вектора рейтингов альтернатив в виде

$$\begin{pmatrix} \mu/6 \\ 1 \\ \mu/6 \\ 1/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.5774 \\ 1.0000 \\ 0.5774 \\ 0.5000 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} \mu/6 \\ \mu/4 \\ 1 \\ 1/2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.5774 \\ 0.8660 \\ 1.0000 \\ 0.5000 \end{pmatrix},$$

которым отвечают следующие два порядка следования альтернатив:

$$\mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_3 \equiv \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_4, \qquad \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_4.$$

Наихудший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив. В выражении для вектора $\boldsymbol{w}_2$ положим $v_2 = 1$. Используя полученный вектор, составим матрицу

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}_1 \oplus \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{A}_2 \oplus \frac{2}{3\lambda}\boldsymbol{A}_3 \oplus \frac{1}{6}\boldsymbol{A}_4 = \boldsymbol{A}_1 \oplus \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2\lambda & 1 & 2\lambda & 3 \\ 3\lambda/2 & 1/3 & 1 & 4 \\ 2\lambda & \lambda & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $\boldsymbol{D}$ определим спектральный радиус ν, составим матрицу $\nu^{-1}\boldsymbol{D}$ и найдем для нее матрицу Клини:

$$\nu = 2^{11/6} \approx 3.5636, \qquad (\nu^{-1}\boldsymbol{D})^* = \begin{pmatrix} 1 & 2/\nu & 2/\nu & 4/\nu \\ \nu/4 & 1 & \nu/4 & 1 \\ 1 & 2/\nu & 1 & 4/\nu \\ \nu/4 & 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Затем вычислим:

$$\delta = \boldsymbol{1}^T(\nu^{-1}\boldsymbol{D})^*\boldsymbol{1} = 4/\nu \approx 1.1225, \qquad (\delta^{-1}\boldsymbol{1}\boldsymbol{1}^T \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D})^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4/\nu \\ \nu/4 & 1 & \nu/4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4/\nu \\ \nu/4 & \nu/4 & \nu/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первый, третий и четвертый столбцы полученной матрицы коллинеарны. Отбрасывая третий и четвертый, запишем наихудшие дифференцирующие решения:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \nu/4 \\ 1 \\ \nu/4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.8909 \\ 1.0000 \\ 0.8909 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \nu/4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ 0.8909 \end{pmatrix},$$

которым соответствуют следующие два порядка следования альтернатив:

$$\mathscr{A}_3 \equiv \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \equiv \mathscr{A}_4, \qquad \mathscr{A}_3 \equiv \mathscr{A}_1 \equiv \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_4.$$

Заметим, что все полученные решения весьма существенно отличаются от решений по методу анализа иерархий и методу взвешенных геометрических средних.

5. ЗАДАЧИ О ВЫБОРЕ МЕСТА РАБОТЫ И МЕСТА ЖИТЕЛЬСТВА

В этом разделе представлены результаты решения двух задач о выборе места работы [7] и о выборе места жительства [10].

5.1. Решение задачи о выборе места работы

Рассмотрим задачу [7, с. 269–270] выбора из числа трех альтернатив $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ и $\mathscr{A}_2$ места работы студентом, получившим ученую степень. Альтернативы сравниваются по шести критериям: возможности для исследований (Research), перспективы роста (Growth), уровень вознаграждения (Benefits), профессиональное окружение (Colleagues), местонахождение (Location) и репутация учреждения (Reputation).

В задаче задана матрица результатов парных сравнений важности критериев

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 & 1 & 1/2 \\ 1 & 1/2 & 1 & 5 & 3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 1/5 & 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1 & 1 & 1/3 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

а также матрицы парных сравнений альтернатив по каждому критерию:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/2 \\ 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1/4 & 1/5 \\ 4 & 1 & 1/2 \\ 5 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 5 \\ 3 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 1 & 1 & 7 \\ 1/7 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 1/7 & 1 & 5 \\ 1/9 & 1/5 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.1.1. Метод анализа иерархий

После вычисления вектора рейтингов, его нормирования относительно максимального элемента, а также определения порядка альтернатив получим

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0.3843 \\ 0.3516 \\ 0.2641 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.9151 \\ 0.6872 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_3.$$

5.1.2. Метод взвешенных геометрических средних

Метод взвешенных геометрических средних дает следующие результаты:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 1.1646 \\ 1.2642 \\ 0.6792 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0.9212 \\ 1.0000 \\ 0.5373 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_3.$$

5.1.3. Метод минимаксной log-чебышевской аппроксимации

Построение вектора весов критериев. Сначала по матрице парных сравнений $\boldsymbol{C}$ построим вектор весов критериев. Для этого вычислим

$$\lambda = 12^{1/4} \approx 1.8612, \qquad (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/\lambda & \lambda^2/6 & 4/\lambda & \lambda/2 & 1/2 \\ 1 & 1 & 2/\lambda & 5\lambda^2/6 & \lambda^2/2 & \lambda/2 \\ \lambda/2 & \lambda/2 & 1 & 5/\lambda & 3/\lambda & \lambda^2/4 \\ \lambda^2/18 & \lambda^2/18 & \lambda/9 & 1 & 1/3 & 1/3\lambda \\ \lambda^2/6 & \lambda^2/6 & \lambda/3 & 5/3 & 1 & 1/\lambda \\ 2/\lambda & 2/\lambda & \lambda^2/3 & 5\lambda/3 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что второй, третий, пятый и шестой столбцы матрицы Клини коллинеарны, а потому все эти столбцы, кроме одного, можно отбросить. Составим матрицу из линейно независимых столбцов, каждый из которых нормируем относительно максимального элемента. Объединяя первый столбец, умноженный на $\lambda/2$, и четвертый, умноженный на $3/5\lambda$, с шестым, определим вектор весов критериев так

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda/2 & \lambda^2/5 & 1/2 \\ \lambda/2 & \lambda/2 & \lambda/2 \\ \lambda^2/4 & \lambda^2/4 & \lambda^2/4 \\ 1/3\lambda & 3/5\lambda & 1/3\lambda \\ 1/\lambda & 1/\lambda & 1/\lambda \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}.$$

Построим наилучший дифференцирующий вектор весов критериев по формуле (4). С этой целью для матрицы $\boldsymbol{P}$ найдем пары индексов (l,k), которые отвечают условиям (5). После необходимых вычислений получим пары $(4,1)$ и $(4,3)$.

Сначала рассмотрим пару индексов $(4,3)$ и построим матрицы $\boldsymbol{P}_{43}$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{P}_{43}^{-}\boldsymbol{P})$. Отбрасывая линейно зависимые столбцы последней матрицы, запишем наилучший дифференцирующий вектор весов в виде

$$\boldsymbol{w}_1 = \begin{pmatrix} \lambda/2 & \lambda/2 & \lambda^2/4 & 1/3\lambda & 1/\lambda & 1 \\ 1/2 & \lambda/2 & \lambda^2/4 & 1/3\lambda & 1/\lambda & 1 \end{pmatrix}^T \boldsymbol{v}_1, \qquad \boldsymbol{v}_1 > \boldsymbol{0}.$$

Аналогичным образом проверяется, что выбор пары индексов $(4,1)$ приводит к первому из полученных выше столбцов, а потому новых решений не дает.

Теперь построим наихудший дифференцирующий вектор весов критериев по формулам (6). Найдем величину

$$\Delta = \boldsymbol{1}^T(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*\boldsymbol{1} = 5\lambda/3 \approx 3.1020.$$

Составим матрицу $\Delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C}$ и построим матрицу Клини

$$(\Delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \begin{pmatrix} 1 & 2\lambda/5 & 4/5 & 4/\lambda & 12/5\lambda & \lambda^2/5 \\ 1 & 1 & 2/\lambda & 5\lambda^2/6 & \lambda^2/2 & \lambda/2 \\ \lambda/2 & \lambda/2 & 1 & 5/\lambda & 3/\lambda & \lambda^2/4 \\ \lambda^2/10 & \lambda^2/10 & \lambda/5 & 1 & 3/5 & 3/5\lambda \\ \lambda^2/6 & \lambda^2/6 & \lambda/3 & 5/3 & 1 & 1/\lambda \\ 2/\lambda & 2/\lambda & \lambda^2/3 & 5\lambda/3 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Все столбцы матрицы, кроме первого, коллинеарны. Объединяя первый столбец, умноженный на $\lambda/2$, с шестым столбцом, получим наихудший дифференцирующий вектор весов

$$\boldsymbol{w}_2 = \begin{pmatrix} \lambda/2 & \lambda/2 & \lambda^2/4 & 3/5\lambda & 1/\lambda & 1 \\ \lambda^2/5 & \lambda/2 & \lambda^2/4 & 3/5\lambda & 1/\lambda & 1 \end{pmatrix} \boldsymbol{v}_2, \qquad \boldsymbol{v}_2 > \mathbf{0}.$$

Наилучший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив. Рассмотрим наилучший дифференцирующей вектор $\boldsymbol{w}_1$ весов критериев и возьмем первый столбец генерирующей матрицы. С его помощью составим взвешенную сумму матриц

$$\boldsymbol{B} = \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{A}_1 \oplus \frac{\lambda}{2}\boldsymbol{A}_2 \oplus \frac{\lambda^2}{4}\boldsymbol{A}_3 \oplus \frac{1}{3\lambda}\boldsymbol{A}_4 \oplus \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}_5 \oplus \boldsymbol{A}_6 = \begin{pmatrix} 1 & 7 & 9 \\ 2\lambda & 1 & 5 \\ 5\lambda/2 & \lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что при выборе второго столбца генерирующей матрицы в качестве вектора весов получается та же самая матрица $\boldsymbol{B}$.

Для матрицы $\boldsymbol{B}$ найдем спектральный радиус μ, составим матрицу $\mu^{-1}\boldsymbol{B}$ и найдем для нее матрицу Клини:

$$\mu = (45\lambda/2)^{1/2} \approx 6.4713, \qquad (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^* = \begin{pmatrix} 1 & 7/\mu & 9/\mu \\ 2\lambda/\mu & 1 & 4/5 \\ \mu/9 & 7/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Третий столбец матрицы Клини коллинеарен первому и может быть отброшен. Выбирая первый столбец вместе со вторым, умноженным на $\mu/7$, получим решение

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2\lambda/\mu & \mu/7 \\ \mu/9 & \mu/9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} > \mathbf{0}.$$

Для матрицы $\boldsymbol{Q}$ условиям (5) удовлетворяет пара индексов $(2,1)$. Составим матрицы $\boldsymbol{Q}_{21}$ и $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{Q}_{21}^{-}\boldsymbol{Q})$. Отбрасывая в последней матрице столбцы, линейно зависимые от остальных, построим наилучшее дифференцирующее решение

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2\lambda/\mu \\ \mu/9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5752 \\ 0.7190 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_2.$$

Наихудший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив. Нетрудно проверить, что первый и второй столбцы генерирующей матрицы для вектора $\boldsymbol{w}_2$ порождают одну и ту же взвешенную сумму $\boldsymbol{D}$, которая, кроме того, совпадает с ранее найденной матрицей $\boldsymbol{B}$. Учитывая равенство $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}$, запишем

$$\nu = \mu, \qquad (\nu^{-1}\boldsymbol{D})^* = (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^*.$$

Затем найдем

$$\delta = \mathbf{1}^T(\nu^{-1}\boldsymbol{D})^*\mathbf{1} = 9/\nu \approx 1.3908, \qquad (\delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D})^* = \begin{pmatrix} 1 & 7/\nu & 9/\nu \\ \nu/9 & 1 & 1 \\ \nu/9 & 7/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первый и последний столбцы полученной матрицы коллинеарны. Объединим первый столбец вместе со вторым, умноженным на $\nu/7$, чтобы записать наихудшие дифференцирующие решения в виде

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \nu/9 \\ \nu/9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.7190 \\ 0.7190 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \equiv \mathscr{A}_3; \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ \nu/7 \\ \nu/9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.9245 \\ 0.7190 \end{pmatrix}, \quad \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_3.$$

Заметим, что найденное наилучшее дифференцирующее решение определяет порядок, который отличается от порядка, полученного методом анализа иерархий и методом взвешенных геометрических средних. Порядок, который дают наихудшие дифференцирующие решения, оказывается наиболее близким к результатам метода анализа иерархий.

5.2. Решение задачи о выборе места жительства

Рассмотрим задачу из работы [10] о выборе города в качестве места жительства. Имеются четыре альтернативы: Бетесда, Бостон, Питтсбург и Санта-Фе. Города сравниваются по следующим критериям: культурная жизнь (Cultural), условия развития семьи (Family), доступность жилья (Housing), возможности трудоустройства (Jobs), транспортная инфраструктура (Transportation).

Матрица результатов парных сравнений критериев выбора имеет вид

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1/5 & 3 & 1/2 & 5 \\ 5 & 1 & 7 & 1 & 7 \\ 1/3 & 1/7 & 1 & 1/4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 7 \\ 1/5 & 1/7 & 1/3 & 1/7 & 1 \end{pmatrix},$$

а матрицы парных сравнений городов по каждому критерию определены так:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 2 & 1 & 5/2 & 1 \\ 1 & 2/5 & 1 & 2/5 \\ 2 & 1 & 5/2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/3 & 4 \\ 1/2 & 1 & 1/8 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 9 \\ 1/4 & 1/2 & 1/9 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 1/2 & 5/2 \\ 1/5 & 1 & 1/9 & 1/4 \\ 2 & 9 & 1 & 7 \\ 2/5 & 4 & 1/7 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 6 & 8 \\ 1/3 & 1/6 & 1 & 1 \\ 1/4 & 1/8 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 1/2 & 4 \\ 2/3 & 1 & 2/7 & 5/2 \\ 2 & 7/2 & 1 & 9 \\ 1/4 & 2/5 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

5.2.1. Метод анализа иерархий

В результате вычисления нормированных главных собственных векторов матриц и взвешенной суммы получим:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0.1757 \\ 0.2483 \\ 0.4598 \\ 0.1162 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0.3820 \\ 0.5400 \\ 1.0000 \\ 0.2526 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_4.$$

5.2.2. Метод взвешенных геометрических средних

После вычисления геометрических средних будем иметь

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 1.2652 \\ 1.1051 \\ 1.4876 \\ 0.4808 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0.8505 \\ 0.7429 \\ 1.0000 \\ 0.3232 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_3 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_4.$$

5.2.3. Метод минимаксной log-чебышевской аппроксимации

Построение вектора весов критериев. Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{C}$ парных сравнений критериев и последовательно найдем

$$\lambda = (45/7)^{1/4} \approx 1.5923, \qquad (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \begin{pmatrix} 1 & \lambda/5 & 3/\lambda & \lambda/5 & 7\lambda^2/5 \\ 5/\lambda & 1 & 7\lambda^2/3 & 1 & 7\lambda \\ \lambda/3 & \lambda^2/15 & 1 & \lambda^2/15 & 3/\lambda \\ 7\lambda^2/9 & 1/\lambda & 7\lambda/3 & 1 & 7 \\ \lambda^2/9 & 1/7\lambda & \lambda/3 & 1/7\lambda & 1 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что первый, второй, третий и пятый столбцы коллинеарны. Оставим второй столбец, чтобы записать вектор весов критериев в виде

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \lambda/5 & \lambda/5 \\ 1 & 1 \\ \lambda^2/15 & \lambda^2/15 \\ 1/\lambda & 1 \\ 1/7\lambda & 1/7\lambda \end{pmatrix} \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}.$$

Построим наилучший дифференцирующий вектор весов критериев по формуле (4). После необходимых вычислений заключаем, что условиям (5) удовлетворяют пары индексов $(5,1)$ и $(5,2)$. Сначала рассмотрим пару $(5,1)$ и построим матрицы $\boldsymbol{P}_{51}$ и $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{P}_{51}^{-}\boldsymbol{P})$. Оставляя линейно независимые столбцы последней матрицы, запишем наилучший дифференцирующий вектор весов критериев в виде

$$\boldsymbol{w} = \begin{pmatrix} \lambda/5 & 1 & \lambda^2/15 & 1/\lambda & 1/7\lambda \\ \lambda/5 & 1 & \lambda^2/15 & 1 & 1/7\lambda \end{pmatrix}^T \boldsymbol{v}, \qquad \boldsymbol{v} > \boldsymbol{0}.$$

Нетрудно проверить, что исследование пары индексов $(5,2)$ приводит к матрице, столбцы которой новых решений не дают.

Проверим, что наихудший дифференцирующий вектор весов критериев совпадает с вектором $\boldsymbol{w}$, найденным выше. После соответствующих вычислений получим

$$\Delta = \mathbf{1}^T(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*\mathbf{1} = 7\lambda \approx 11.1462, \qquad (\Delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*.$$

Следовательно, наихудший дифференцирующий вектор весов критериев, который определяют столбцы матрицы $(\Delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*$, будет совпадать с вектором $\boldsymbol{w}$.

Наилучший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив. Выбирая первый столбец генерирующей матрицы вектора весов $\boldsymbol{w}$, составим взвешенную сумму

$$\boldsymbol{B} = \frac{\lambda}{5}\boldsymbol{A}_1 \oplus \boldsymbol{A}_2 \oplus \frac{\lambda^2}{15}\boldsymbol{A}_3 \oplus \frac{1}{\lambda}\boldsymbol{A}_4 \oplus \frac{1}{7\lambda}\boldsymbol{A}_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3/\lambda & 4 \\ 2/\lambda & 1 & 6/\lambda & 8/\lambda \\ 3 & 8 & 1 & 9 \\ 2\lambda/5 & 4\lambda^2/15 & \lambda/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $\boldsymbol{B}$ найдем

$$\mu = (48/\lambda)^{1/2} \approx 5.4904, \qquad (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^* = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & \mu/16 & 4/\mu \\ 3/8 & 1 & \mu/8 & 9/8 \\ 3/\mu & 8/\mu & 1 & 9/\mu \\ 2\lambda/5\mu & 4\lambda/\mu^2 & \lambda/2\mu & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что второй и третий столбцы коллинеарны, второй столбец отбросим. После умножения четвертого столбца на $\mu/9$ запишем вектор решений в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & \mu/16 & 4/9 \\ 3/8 & \mu/8 & \mu/8 \\ 3/\mu & 1 & 1 \\ 2\lambda/5\mu & \lambda/2\mu & \mu/9 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} > \mathbf{0}.$$

Найдем среди полученных решений наилучший дифференцирующий вектор. Условиям (10) отвечает пара индексов $(4,1)$. Построим матрицу $\boldsymbol{Q}_{41}$, а затем матрицу $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{Q}_{41}^{-}\boldsymbol{Q})$. Сохраняя линейно независимые столбцы последней матрицы, представим наилучшие дифференцирующие векторы рейтингов в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/\mu & 2\lambda/5\mu \end{pmatrix}^T, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \mu/10 & 4/5 & 2\lambda/5\mu \end{pmatrix}^T.$$

Аналогичным образом строится взвешенная сумма с помощью второго столбца матрицы вектора весов $\boldsymbol{w}$ и проводится ее исследование. В результате получаем еще одну пару наилучших дифференцирующих векторов

$$\begin{pmatrix} 1 & 3/8 & 3/\mu & 2\lambda/5\mu \end{pmatrix}^T, \qquad \begin{pmatrix} 1 & \lambda/20 & 2\lambda/5 & 2\lambda/5\mu \end{pmatrix}^T.$$

Объединение всех векторов дает наилучшие дифференцирующие решения в виде

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 3/8 \\ 3/\mu \\ 2\lambda/5\mu \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.3750 \\ 0.4330 \\ 0.1160 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ \mu/10 \\ 4/5 \\ 2\lambda/5\mu \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5490 \\ 0.8000 \\ 0.1160 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda/20 \\ 2\lambda/5 \\ 2\lambda/5\mu \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.5516 \\ 0.6369 \\ 0.0919 \end{pmatrix},$$

которые определяют один и тот же порядок альтернатив

$$\mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_3 \succ \mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_4.$$

Наихудший дифференцирующий вектор рейтингов альтернатив. В силу того, что наилучший и наихудший дифференцирующие векторы весов критериев совпадают, можно воспользоваться результатами предыдущего раздела.

Выбирая первый столбец генерирующей матрицы для вектора весов $\boldsymbol{w}$, составим взвешенную сумму $\boldsymbol{D}$. Заметим, что $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{B}$. Тогда выполняются равенства:

$$\nu = \mu, \qquad (\nu^{-1}\boldsymbol{D})^* = (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^*.$$

Последовательно найдем

$$\delta = \mathbf{1}^T(\nu^{-1}\boldsymbol{D})^*\mathbf{1} = 9/\nu \approx 1.6392, \qquad (\delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D})^* = \begin{pmatrix} 1 & 8/9 & \nu/9 & 1 \\ \nu/8 & 1 & \nu/8 & 9/8 \\ 1 & 8/\nu & 1 & 9/\nu \\ \nu/9 & 8/9 & \nu/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Второй, третий и четвертый столбцы последней матрицы коллинеарны. Оставим второй, умноженный на $\nu/8$, чтобы записать решения в виде

$$\begin{pmatrix} 1 & \nu/8 & 1 & \nu/9 \end{pmatrix}^T, \qquad \begin{pmatrix} \nu/9 & \nu/8 & 1 & \nu/9 \end{pmatrix}^T.$$

Составим взвешенную сумму с помощью второго столбца генерирующей матрицы для $\boldsymbol{w}$ и повторим исследование. В результате получим решения:

$$\begin{pmatrix} 1 & \nu/8 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}^T, \qquad \begin{pmatrix} 3/4 & \nu/8 & 1 & 3/4 \end{pmatrix}^T.$$

После объединения найденных решений и отбрасывания линейно зависимых столбцов получим три наихудших вектора рейтингов альтернатив:

$$\begin{pmatrix} \nu/9 \\ \nu/8 \\ 1 \\ \nu/9 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.6100 \\ 0.6863 \\ 1.0000 \\ 0.6100 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ \nu/8 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.8660 \\ 1.0000 \\ 0.7500 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 3/4 \\ \nu/8 \\ 1 \\ 3/4 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0.7500 \\ 0.8660 \\ 1.0000 \\ 0.7500 \end{pmatrix},$$

которые определяют следующие порядки альтернатив:

$$\mathcal{A}_3 \succ \mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_1 \equiv \mathcal{A}_4, \qquad \mathcal{A}_3 \equiv \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_4.$$

Полученные результаты показывают, что порядок альтернатив, найденный методом минимаксной log-чебышевской аппроксимации, может существенно отличаться от упорядочения альтернатив двумя другими методами. В целом, порядок, который определяется наилучшим дифференцирующим вектором рейтингов альтернатив, оказывается наиболее близким к результату метода взвешенных геометрических средних. Порядок, полученный на основе наихудших дифференцирующих векторов, более всего соответствует порядку метода анализа иерархий.

6. ЗАДАЧИ ИЗ РАБОТЫ V. BELTON, T. GEAR (1983)

Рассмотрим примеры из работы [8], которые состоят в решении двух задач с $m = 3$ критериями и с числом альтернатив $n = 3$ (задача 1) и $n = 4$ (задача 2).

6.1. Решение задачи 1

Пусть матрица парных сравнений критериев задана в виде

$$\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы парных сравнений альтернатив по каждому критерию определены так:

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/9 & 1 \\ 9 & 1 & 9 \\ 1 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 1/9 & 1 & 1 \\ 1/9 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 8/9 & 8 \\ 9/8 & 1 & 9 \\ 1/8 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применим метод анализа иерархий. Вычисляя нормированные главные собственные векторы матриц, находим векторы рейтингов и порядок альтернатив:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0.4512 \\ 0.4697 \\ 0.0791 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i = \begin{pmatrix} 0.9606 \\ 1.0000 \\ 0.1685 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_3.$$

Найдем решение задачи с помощью метода взвешенных геометрических средних. В результате получим:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 1.5874 \\ 1.6510 \\ 0.3816 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x} / \max_i x_i = \begin{pmatrix} 0.9615 \\ 1.0000 \\ 0.2311 \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{A}_2 \succ \mathcal{A}_1 \succ \mathcal{A}_3.$$

Перейдем к решению с помощью минимаксной log-чебышевской аппроксимации с применением вычислений в терминах max-алгебры. Сначала заметим, что

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}^2 = \boldsymbol{C}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \lambda = 1, \qquad (\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \boldsymbol{C}.$$

Все столбцы матрицы Клини $(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*$ равны. Оставим первый, чтобы записать вектор весов критериев в виде

$$\boldsymbol{w} = \boldsymbol{P}v, \qquad \boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v > 0.$$

Положив $v = 1$, составим взвешенную сумму, найдем ее спектральный радиус и матрицу Клини:

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 \oplus \boldsymbol{A}_2 \oplus \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 9 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mu = 9, \qquad (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1/9 & 1/9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первый и второй столбцы матрицы Клини совпадают. Возьмем первый и третий столбцы, чтобы записать решения в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1/9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}.$$

Условиям (5) удовлетворяет пара индексов $(3,1)$. Составим матрицу $\boldsymbol{Q}_{31}$, а затем матрицу $\boldsymbol{Q}(\boldsymbol{I} \oplus \boldsymbol{Q}_{31}^{-}\boldsymbol{Q})$. Сохраняя линейно независимые столбцы последней матрицы, запишем наилучшее дифференцирующее решение в виде

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1/9 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_1 \equiv \mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_3.$$

Найдем наихудший дифференцирующий вектор весов критериев по формулам (6). Последовательно вычислим

$$\delta = \mathbf{1}^T(\lambda^{-1}\boldsymbol{C})^*\mathbf{1} = 1, \qquad (\delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C})^* = \delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \lambda^{-1}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}.$$

Столбцы полученной матрицы одинаковы и имеют все элементы, равные 1. Матрица $\boldsymbol{D}$ совпадает с $\boldsymbol{B}$ и выполняются равенства:

$$\nu = \mu, \qquad (\nu^{-1}\boldsymbol{D})^* = (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^*.$$

Теперь вычислим

$$\delta = \mathbf{1}^T(\nu^{-1}\boldsymbol{D})^*\mathbf{1} = 1, \qquad (\delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D})^* = \delta^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T \oplus \nu^{-1}\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что все столбцы полученной матрицы равны, запишем наихудшее решение в виде

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_1 \equiv \mathscr{A}_2 \equiv \mathscr{A}_3.$$

Заметим, что полученное наилучшее дифференцирующее решение устанавливает порядок альтернатив, который близок к порядку, полученному методом анализа иерархий и методом взвешенных геометрических средних. Наихудшее дифференцирующее решение не позволяет дифференцировать альтернативы.

6.2. Решение задачи 2

Рассмотрим задачу, в которой матрица парных сравнений критериев $\boldsymbol{C}$ определена так же, как в предыдущем примере.

Пусть число альтернатив теперь равно $n = 4$, а матрицы парных сравнений альтернатив по каждому критерию имеют вид

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/9 & 1 & 1/9 \\ 9 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1/9 & 1 & 1/9 \\ 9 & 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 9 \\ 1/9 & 1 & 1 & 1 \\ 1/9 & 1 & 1 & 1 \\ 1/9 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 8/9 & 8 & 8/9 \\ 9/8 & 1 & 9 & 1 \\ 1/8 & 1/9 & 1 & 1/9 \\ 9/8 & 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}.$$

Метод анализа иерархий дает следующие результаты:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 0.3654 \\ 0.2889 \\ 0.0568 \\ 0.2889 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 0.7905 \\ 0.1554 \\ 0.7905 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \equiv \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3.$$

Используя метод взвешенных геометрических средних, находим:

$$\boldsymbol{x} \approx \begin{pmatrix} 1.4004 \\ 1.4565 \\ 0.3366 \\ 1.4565 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{x}/\max_i x_i \approx \begin{pmatrix} 0.9615 \\ 1.0000 \\ 0.2311 \\ 1.0000 \end{pmatrix}, \qquad \mathscr{A}_2 \equiv \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_3.$$

Применим метод минимаксной log-чебышевской аппроксимации. Учитывая, что вектор весов $\boldsymbol{w}$ совпадает с вектором весов предыдущей задачи, получим

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}_1 \oplus \boldsymbol{A}_2 \oplus \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 9 & 9 & 9 \\ 9 & 1 & 9 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 9 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mu = 9, \quad (\mu^{-1}\boldsymbol{B})^* = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1/9 & 1/9 & 1 & 1/9 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Первый, второй и четвертый столбцы совпадают. Возьмем первый и третий столбцы, чтобы записать решения в виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{u}, \qquad \boldsymbol{Q} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1/9 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}.$$

Матрица $\boldsymbol{Q}$ имеет столбцы

$$\begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 0.1111 \\ 1.0000 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \\ 1.0000 \end{pmatrix},$$

из которых первый, очевидно, является наилучшим дифференцирующим вектором, а второй — наихудшим. Применение формул (4), (5) и (6) дает тот же результат.

Полученные векторы определяют следующие порядки альтернатив:

$$\mathscr{A}_2 \equiv \mathscr{A}_4 \equiv \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_3, \qquad \mathscr{A}_2 \equiv \mathscr{A}_4 \equiv \mathscr{A}_1 \equiv \mathscr{A}_3.$$

Заметим, что задача 2 отличается от задачи 1 добавлением четвертой альтернативы, результаты сравнения которой с другими альтернативами показывают, что эта альтернатива идентична второй. Естественно ожидать, что при добавлении четвертой альтернативы общий порядок альтернатив с учетом условия $\mathscr{A}_2 \equiv \mathscr{A}_4$ не измениться.

Результаты применения метода взвешенных геометрических средних и наилучшее дифференцирующее решение метода минимаксной log-чебышевской аппроксимации сохраняют порядок второй и четвертой альтернативы относительно первой и третьей. Однако в результате применения метода анализа иерархий этот порядок меняется с $\mathscr{A}_2 \succ \mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_3$ на $\mathscr{A}_1 \succ \mathscr{A}_2 \equiv \mathscr{A}_4 \succ \mathscr{A}_3$.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе для ряда известных многокритериальных задач оценки альтернатив на основе парных сравнений представлены решения с помощью метода анализа иерархий, метода взвешенных геометрических средних и метода минимаксной log-чебышевской аппроксимации с использованием тропической математики. Сравнение полученных решений демонстрирует, что применение различных методов не всегда приводят к одинаковым или близким результатам.

На основе полученных результатов можно сделать следующие выводы. Если результаты различных методов значительно расходятся, выбор одного из них для принятия решения представляется не вполне обоснованным. Наоборот, совпадение или близость результатов может рассматриваться как некоторый дополнительный аргумент в пользу выбора одного из них в качестве решения, близкого к оптимальному.

Для дальнейших исследований представляет интерес построение и сравнительный анализ решений других известных в литературе и новых задач парных сравнений.

В заключение авторы благодарят рецензентов за весьма полезные замечания и предложения, которые были учтены при работе над текстом статьи.

Список литературы

1. *Подиновский В. В., Ногин В. Д.* Парето-оптимальные решения многокритериальных задач. М.: Наука, 1982. 256 с.
2. *Саати Т.* Принятие решений. Метод анализа иерархий / пер. с англ. Р. Г. Вачнадзе. М.: Радио и связь, 1993. 315 с.
3. *Ногин В. Д.* Принятие решений в многокритериальной среде: количественный подход. М.: Физматлит, 2002. 144 с.
4. *Choo E. U., Wedley W. C.* A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices // Comput. Oper. Res. 2004. Vol. 31, № 6. P. 893–908. doi: 10.1016/S0305-0548(03)00042-X
5. *Saaty T. L., Vargas L. G.* Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios // Math. Modelling. 1984. Vol. 5, № 5. P. 309–324. doi: 10.1016/0270-0255(84)90008-3
6. *Tran N. M.* Pairwise ranking: choice of method can produce arbitrarily different rank order Linear Algebra Appl. 2013. Vol. 438, № 3. P. 1012–1024. doi: 10.1016/j.laa.2012.08.028
7. *Saaty T. L.* A scaling method for priorities in hierarchical structures // J. Math. Psych. 1977. Vol. 15, № 3. P. 234–281. doi: 10.1016/0022-2496(77)90033-5
8. *Belton V., Gear T.* On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies // Omega. 1983. Vol. 11, № 3. P. 228–230. doi: 10.1016/0305-0483(83)90047-6
9. *Saaty T. L., Hu G.* Ranking by eigenvector versus other methods in the Analytic Hierarchy Process // Appl. Math. Letters. 1998. Vol. 11, № 4. P. 121–125. doi: 10.1016/S0893-9659(98)00068-8
10. *Saaty T. L.* Decision making — the Analytic Hierarchy and Network Processes (AHP/ANP) // J. Syst. Sci. Syst. Eng. 2004. Vol. 13, № 1. P. 1–35. doi: 10.1007/s11518-006-0151-5
11. *Crawford G., Williams C.* A note on the analysis of subjective judgment matrices // J. Math. Psych. 1985. Vol. 29, № 4. P. 387–405. doi: 10.1016/0022-2496(85)90002-1
12. *Кривулин Н. К., Агеев В. А., Гладких И. В.* Применение методов тропической оптимизации для оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. 2017. Т. 13. Вып. 1. С. 27–41. doi: 10.21638/11701/spbu10.2017.103
13. *Кривулин Н. К., Агеев В. А.* Методы тропической оптимизации в многокритериальных задачах оценки альтернатив на основе парных сравнений // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Прикладная математика. 2019. Т. 15. Вып. 4. С. 472–488. doi: 10.21638/11702/spbu10.2019.405
14. *Chu M. T.* On the optimal consistent approximation to pairwise comparison matrices // Linear Algebra Appl. 1998. Vol. 272, № 1–3. P. 155–168. doi: 10.1016/S0024-3795(97)00329-7
15. *Кривулин Н. К., Гладких И. В.* Построение согласованной матрицы парных сравнений в маркетинговых исследованиях на основе методов тропической математики // Вестн. С.-Петерб. ун-та. Сер. 8. Менеджмент. 2015. Вып. 1. С. 3–43.
16. *Krivulin N. K., Sergeev S. N.* Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method // Fuzzy Sets and Systems. 2019. Vol. 377. P. 31–51. doi:10.1016/j.fss.2018.10.013.
17. *Krivulin N.* Rating alternatives from pairwise comparisons by solving tropical optimization problems // 2015 12th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD), 15–17 August, Zhangjiajie, China / Ed. by Z. Tang, J. Du, S. Yin, L. He, R. Li. IEEE, 2015. P. 162–167. doi: 10.1109/FSKD.2015.7381933
18. *Krivulin N.* Using tropical optimization techniques to evaluate alternatives via pairwise comparisons // 2016 Proc. 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing / Ed. by A. H. Gebremedhin, E. G. Boman, B. Ucar. Philadelphia, PA: SIAM, 2016. P. 62–72. doi: 10.1137/1.9781611974690.ch7
19. *Ehrgott M.* Multicriteria Optimization. Berlin: Springer, 2005. doi:10.1007/3-540-27659-9
20. *Nakayama H., Yun Y., Yoon M.* Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence. Berlin: Springer, 2009. 197 p. (Springer Series in Vector Optimization) doi: 10.1007/978-3-540-88910-6
21. *Krivulin N.* Methods of tropical optimization in rating alternatives based on pairwise comparisons // Operations Research Proceedings 2016 / Ed. by A. Fink, A. Fügenschuh, M. J. Geiger. Cham: Springer, 2018. P. 85–91. doi: 10.1007/978-3-319-55702-1_13

22. *Baccelli F. L., Cohen G., Olsder G. J., Quadrat J.-P.* Synchronization and Linearity. Wiley Series in Probability and Statistics. Chichester: Wiley, 1993. 514 p.
23. *Маслов В. П., Колокольцов В. Н.* Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физматлит, 1994. 144 с.
24. *Golan J. S.* Semirings and Affine Equations over Them. New York: Springer, 2003. Vol. 556 of Mathematics and Its Applications. 256 p. doi:10.1007/978-94-017-0383-3
25. *Heidergott B., Olsder G. J., van der Woude J.* Max Plus at Work. Princeton Series in Applied Mathematics. Princeton: Princeton Univ. Press, 2006. 226 p.
26. *Кривулин Н. К.* Методы идемпотентной алгебры в задачах моделирования и анализа сложных систем. СПб.: Изд-во С.-Петерб. ун-та, 2009. 255 с.

Поступила в редакцию 22.05.2020, окончательный вариант — 29.06.2020.

Кривулин Николай Кимович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры статистического моделирования СПбГУ, ✉ nkk@math.spbu.ru

Абильдаев Темирлан, бакалавр математико-механического факультета СПбГУ, jonoth2357@gmail.com

Горшечникова Владлена Дмитриевна, бакалавр математико-механического факультета СПбГУ, st054363@student.spbu.ru

Капаца Дейвид, бакалавр математико-механического факультета СПбГУ, David.Kapatsa@chaminade-stl.org

Магдич Елизавета Алексеевна, бакалавр математико-механического факультета СПбГУ, st054381@student.spbu.ru

Мандрикова Анастасия Андреевна, бакалавр математико-механического факультета СПбГУ, st054754@student.spbu.ru

---

Computer tools in education, 2020
№ 2: 27–58
http://cte.eltech.ru
doi:10.32603/2071-2340-2020-2-27-58

On Solving Multicriteria Decision Making Problems Based on Pairwise Comparisons

Krivulin N. K.[1], PhD, professor, ✉ nkk@math.spbu.ru
Abildaev T., bachelor, jonoth2357@gmail.com
Gorshechnikova V. D., bachelor, st054363@student.spbu.ru
Kapatsa D., bachelor, David.Kapatsa@chaminade-stl.org
Magdich E. A., bachelor, st054381@student.spbu.ru
Mandrikova A. A., bachelor, st054754@student.spbu.ru

[1]Saint Petersburg State University, 28 Universitetskiy pr., Stary Peterhof, 198504, Saint Petersburg, Russia

Abstract

Problems known in the literature are considered for evaluating ratings of alternatives based on pairwise comparisons. To solve the problems, three methods are used, including the traditional method of of analysis of hierarchies by T. Saaty and the method of weighted geometric means, as well as the new method of minimax log-Chebyshev approximation, for which the solution is obtained using the apparatus and methods of tropical (idempotent) mathematics. Comparison of the solutions obtained shows that the use of different methods does not always lead to the same or close results. If the results of different methods differ significantly the choice of one of them for making a decision does not seem entirely justified. On the contrary, the coincidence or similarity of these results can be considered as some additional argument in favor of choosing one of them as a solution close to the optimum.

Keywords: *multicriteria decision making problems, pairwise comparisons, analytical hierarchy process, tropical mathematics.*

Citation: N. K. Krivulin, T. Abildaev, V. D. Gorshechnikova, D. Kapatsa, E. A. Magdich, and A. A. Mandrikova , "On Solving Multicriteria Decision Making Problems Based on Pairwise Comparisons," *Computer tools in education*, no. 2, pp. 27–58, 2020 (in Russian); doi: 10.32603/2071-2340-2020-2-27-58

References

1. V. V. Podinovskii and V. D. Nogin, *Pareto-optimal'nye resheniya mnogokriterial'nykh zadach* [Pareto-optimal solutions to multicriteria problems], Moscow: Nauka, 1982 (in Russian).
2. T. Saati, *Decision making. Hierarchy analysis method*, Moscow: Radio i svyaz', 1993 (in Russian).
3. V. D. Nogin, *Prinyatie reshenii v mnogokriterial'noi srede: kolichestvennyi podkhod* [Decision making in a multicriteria environment: a quantitative approach], Moscow: Fizmatlit, 2002 (in Russian).
4. E. U. Choo and W. C. Wedley, "A common framework for deriving preference values from pairwise comparison matrices," *Computers Operations Research*, vol. 31, no. 6, pp. 893–908, 2004; doi: 10.1016/S0305-0548(03)00042-X
5. T. L. Saaty and L. G. Vargas, "Comparison of eigenvalue, logarithmic least squares and least squares methods in estimating ratios," *Mathematical Modelling*, vol. 5, no. 5, pp. 309–324, 1984; doi: 10.1016/0270-0255(84)90008-3
6. N. M. Tran, "Pairwise ranking: choice of method can produce arbitrarily different rank order," *Linear Algebra Appl.*, vol. 438, no. 3, pp. 1012–1024, 2013; doi: 10.1016/j.laa.2012.08.028
7. T. L. Saaty, "A scaling method for priorities in hierarchical structures," *J. Math. Psych.*, vol. 15, no. 3, pp. 234–281, 1977; doi: 10.1016/0022-2496(77)90033-5
8. V. Belton and T. Gear, "On a short-coming of Saaty's method of analytic hierarchies," *Omega*, vol. 11, no. 3, pp. 228–230, 1983; doi: 10.1016/0305-0483(83)90047-6
9. T. L. Saaty and G. Hu, "Ranking by eigenvector versus other methods in the Analytic Hierarchy Process," *Appl. Math. Letters.*, vol. 11, no. 4, pp. 121–125; doi: 10.1016/S0893-9659(98)00068-8
10. T. L. Saaty, "Decision making — the Analytic Hierarchy and Network Processes (AHP/ANP)," *J. Syst. Sci. Syst. Eng.*, vol. 13, no. 1, pp. 1–35, 2004; doi: 10.1007/s11518-006-0151-5
11. G. Crawford and C. Williams, "A note on the analysis of subjective judgment matrices," *J. Math. Psych.*, vol. 29, no. 4, pp. 387–405, 1985; doi: 10.1016/0022-2496(85)90002-1
12. N. K. Krivulin, V. A. Ageev, and I. V. Gladkikh, "Application of methods of tropical optimization for evaluating alternatives based on pairwise comparisons," *Vestnik of St Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, vol. 13, no. 1, pp. 27–41, 2017 (in Russian); doi: 10.21638/11701/spbu10.2017.103
13. N. K. Krivulin and V. A. Ageev, "Methods of tropical optimization in multicriteria problems of raiting alternatives from pairwise comparisons," *Vestnik of St Petersburg University. Applied Mathematics. Computer Science. Control Processes*, vol. 15, no. 4, pp. 472–488, 2019 (in Russian); doi: 10.21638/11702/spbu10.2019.405
14. M. T. Chu, "On the optimal consistent approximation to pairwise comparison matrices," *Linear Algebra Appl.*, vol. 272, no. 1–3, pp. 155–168, 1998; doi: 10.1016/S0024-3795(97)00329-7
15. N. K. Krivulin and I. V. Gladkikh, "Computation of the consistent pairwise comparison matrix in marketing research by using methods of tropical mathematics," *Vestnik of St Petersburg University. Management*, no. 1, pp. 3–43, 2015 (in Russian).
16. N. K. Krivulin and S. N. Sergeev, "Tropical implementation of the Analytical Hierarchy Process decision method," *Fuzzy Sets and Systems*, vol. 377, pp. 31–51; doi: 10.1016/j.fss.2018.10.013
17. N. K. Krivulin, "Rating alternatives from pairwise comparisons by solving tropical optimization problems," in *Proc. 12th International Conference on Fuzzy Systems and Knowledge Discovery (FSKD)*, Zhangjiajie, China, 2015, pp. 162–167; doi: 10.1109/FSKD.2015.7381933
18. N. K. Krivulin, "Using tropical optimization techniques to evaluate alternatives via pairwise comparisons," in *Proc. Proc. 7th SIAM Workshop on Combinatorial Scientific Computing*, Philadelphia, PA, USA: SIAM, 2016, pp. 62–72; doi: 10.1137/1.9781611974690.ch7
19. M. Ehrgott, *Multicriteria Optimization*, Berlin: Springer, 2005; doi: 10.1007/3-540-27659-9

20. H. Nakayama, Y. Yun, and M. Yoon, *Sequential Approximate Multiobjective Optimization Using Computational Intelligence*, Berlin: Springer, 2009; doi: 10.1007/978-3-540-88910-6
21. N. K. Krivulin, "Methods of tropical optimization in rating alternatives based on pairwise comparisons," in *Operations Research Proceedings 2016. Operations Research Proceedings (GOR (Gesellschaft für Operations Research e.V.))*, Springer, Cham, pp. 85–91, 2018; doi: 10.1007/978-3-319-55702-1_13
22. F. L. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J.-P. Quadrat, *Synchronization and Linearity. Wiley Series in Probability and Statistics*, Chichester, UK: Wiley, 1993.
23. V. P. Maslov and V. N. Kolokol'tsov, "Idempotentnyi analiz i ego primenenie v optimal'nom upravlenii" [Idempotent analysis and its application in optimal control], Moscow: Fizmatlit, 1994 (in Russian).
24. J. S. Golan, *Semirings and Affine Equations over Them: Theory and Applications*, New York: Springer, 2003; doi:10.1007/978-94-017-0383-3
25. B. Heidergott, G. J. Olsder, and J. van der Woude, *Max Plus at Work. Princeton Series in Applied Mathematics*, Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2006.
26. N. K. Krivulin, "Metody idempotentnoi algebry v zadachakh modelirovaniya i analiza slozhnykh sistem" [Idempotent algebra methods in modeling and analysis of complex systems], St. Petersburg, Russia: Izdatel'stvo Sankt-Peterburgskogo universiteta, 2009.

Received 22.05.2020, the final version — 29.06.2020.

Nikolai K. Krivulin, PhD, professor of Statistical modeling Department Saint Petersburg State University, ✉ nkk@math.spbu.ru

Temirlan Abildaev, bachelor of mathematics and mechanics, Saint Petersburg State University, jonoth2357@gmail.com

Vladlena D. Gorshechnikova, bachelor of mathematics and mechanics, Saint Petersburg State University, st054363@student.spbu.ru

Deivid Kapatsa, bachelor of mathematics and mechanics, Saint Petersburg State University, David.Kapatsa@chaminade-stl.org

Elizaveta A. Magdich, bachelor of mathematics and mechanics, Saint Petersburg State University, st054381@student.spbu.ru

Anastasia A. Mandrikova, bachelor of mathematics and mechanics, Saint Petersburg State University, st054754@student.spbu.ru